

Michał Dobranowski
<https://dobranow.ski>

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Wydział Informatyki

Poznań, 10 maja 2025

Twierdzenie Balinskiego-Younga

O pułapkach proporcjonalnych podziałów

Istnieje n partii politycznych, które startują w wyborach do sejmu, który w danym okręgu ma łącznie M miejsc do obsadzenia. Naszym zadaniem jest podział mandatów pomiędzy partie w sposób *proporcjonalny* do liczby głosów na nie oddanych.

Istnieje n partii politycznych, które startują w wyborach do sejmu, który w danym okręgu ma łącznie M miejsc do obsadzenia. Naszym zadaniem jest podział mandatów pomiędzy partie w sposób *proporcjonalny* do liczby głosów na nie oddanych.

Kwotę (czy też iloraz wyborczy) i -tej partii oznaczamy przez q_i i definiujemy jako

$$q_i = M \frac{p_i}{P},$$

gdzie p_i to liczba głosów oddanych na i -tą partię, a P to liczba głosów oddanych w okręgu.

Weźmy pewien okręg wyborczy; niech ma 8 mandatów do sejmu i 10 tysięcy wyborców.

Weźmy pewien okręg wyborczy; niech ma 8 mandatów do sejmu i 10 tysięcy wyborców.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1250	3750	5000

Weźmy pewien okręg wyborczy; niech ma 8 mandatów do sejmu i 10 tysięcy wyborców.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1250	3750	5000
q_i	1	3	4

Weźmy pewien okręg wyborczy; niech ma 8 mandatów do sejmu i 10 tysięcy wyborców.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1250	3750	5000
q_i	1	3	4
mandaty	1	3	4

Weźmy pewien okręg wyborczy; niech ma 8 mandatów do sejmu i 10 tysięcy wyborców.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1250	3750	5000
q_i	1	3	4
mandaty	1	3	4

	partia A	partia B	partia C
głosy	1220	3730	5050

Weźmy pewien okręg wyborczy; niech ma 8 mandatów do sejmu i 10 tysięcy wyborców.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1250	3750	5000
q_i	1	3	4
mandaty	1	3	4

	partia A	partia B	partia C
głosy	1220	3730	5050
q_i	0.976	2.984	4.04

Weźmy pewien okręg wyborczy; niech ma 8 mandatów do sejmu i 10 tysięcy wyborców.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1250	3750	5000
q_i	1	3	4
mandaty	1	3	4

	partia A	partia B	partia C
głosy	1220	3730	5050
q_i	0.976	2.984	4.04
mandaty	1	3	4

Stosujemy zwykłe zaokrąglanie.

Stosujemy zwykłe zaokrąglanie.

	partia A	partia B	partia C
głosy	2900	3100	4000

Stosujemy zwykłe zaokrąglanie.

	partia A	partia B	partia C
głosy	2900	3100	4000
q_i	2.32	2.48	3.20

Stosujemy zwykłe zaokrąglanie.

	partia A	partia B	partia C
głosy	2900	3100	4000
q_i	2.32	2.48	3.20
mandaty	2	2	3

Stosujemy zwykłe zaokrąglanie.

	partia A	partia B	partia C
głosy	2900	3100	4000
q_i	2.32	2.48	3.20
mandaty	2	2	3

Stosujemy zwykłe zaokrąglanie.

	partia A	partia B	partia C
głosy	2900	3100	4000
q_i	2.32	2.48	3.20
mandaty	2	2	3

Sumaryczna liczba mandatów niekoniecznie jest równa M .

Zaokrąglamy kwotę w dół; następnie przydzielamy pozostałe mandaty względem największej reszty.

Zaokrąglamy kwotę w dół; następnie przydzielamy pozostałe mandaty względem największej reszty.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1900	2100	6000

Zaokrąglamy kwotę w dół; następnie przydzielamy pozostałe mandaty względem największej reszty.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1900	2100	6000
q_i	1.52	1.68	4.80

Zaokrąglamy kwotę w dół; następnie przydzielamy pozostałe mandaty względem największej reszty.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1900	2100	6000
q_i	1.52	1.68	4.80
mandaty	1	1	4

Zaokrąglamy kwotę w dół; następnie przydzielamy pozostałe mandaty względem największej reszty.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1900	2100	6000
q_i	1.52	1.68	4.80
mandaty	1	1	4 + 1

Zaokrąglamy kwotę w dół; następnie przydzielamy pozostałe mandaty względem największej reszty.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1900	2100	6000
q_i	1.52	1.68	4.80
mandaty	1	1 + 1	4 + 1

Zaokrąglamy kwotę w dół; następnie przydzielamy pozostałe mandaty względem największej reszty.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1900	2100	6000
q_i	1.52	1.68	4.80
mandaty	1	1 + 1	4 + 1

Dobra wiadomość

Ta metoda (zwana metodą Hamiltona lub Hare'a-Niemeyera) jest poprawna.

Zaokrąglamy kwotę w dół; następnie przydzielamy pozostałe mandaty względem największej reszty.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1900	2100	6000
q_i	1.52	1.68	4.80
mandaty	1	1 + 1	4 + 1

Dobra wiadomość

Ta metoda (zwana metodą Hamiltona lub Hare'a-Niemeyera) jest poprawna.

Kolejna dobra wiadomość

Ta metoda **zachowuje kwotę**, tzn. liczba mandatów przydzielonych i -tej partii jest równa $\lfloor q_i \rfloor$ lub $\lceil q_i \rceil$.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1800	4100	4100

	partia A	partia B	partia C
głosy	1800	4100	4100
q_i	1.44	3.28	3.28

	partia A	partia B	partia C
głosy	1800	4100	4100
q_i	1.44	3.28	3.28
mandaty	2	3	3

	partia A	partia B	partia C
głosy	1800	4100	4100
q_i	1.44	3.28	3.28
mandaty	2	3	3

Zwiększmy liczbę mandatów do 9.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1800	4100	4100
q_i	1.44	3.28	3.28
mandaty	2	3	3

Zwiększmy liczbę mandatów do 9.

	partia A	partia B	partia C
q_i	1.62	3.69	3.69

	partia A	partia B	partia C
głosy	1800	4100	4100
q_i	1.44	3.28	3.28
mandaty	2	3	3

Zwiększmy liczbę mandatów do 9.

	partia A	partia B	partia C
q_i	1.62	3.69	3.69
mandaty	1	4	4

	partia A	partia B	partia C
głosy	1800	4100	4100
q_i	1.44	3.28	3.28
mandaty	2	3	3

Zwiększmy liczbę mandatów do 9.

	partia A	partia B	partia C
q_i	1.62	3.69	3.69
mandaty	1	4	4

Definicja (Paradoks Alabamy)

Sytuacja, w której zwiększenie ogólnej liczby mandatów prowadzi do zmniejszenia liczby mandatów przydzielonych danej partii.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1850	2600	5550

	partia A	partia B	partia C
głosy	1850	2600	5550
q_i	1.48	2.08	4.44

	partia A	partia B	partia C
głosy	1850	2600	5550
q_i	1.48	2.08	4.44
mandaty	2	2	4

	partia A	partia B	partia C
głosy	1850	2600	5550
q_i	1.48	2.08	4.44
mandaty	2	2	4

Zmieńmy liczby głosów oddanych na partie.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1850	2600	5550
q_i	1.48	2.08	4.44
mandaty	2	2	4

Zmieńmy liczby głosów oddanych na partie.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1890	2200	5520

	partia A	partia B	partia C
głosy	1850	2600	5550
q_i	1.48	2.08	4.44
mandaty	2	2	4

Zmieńmy liczby głosów oddanych na partię.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1890	2200	5520
q_i	1.57	1.83	4.60

	partia A	partia B	partia C
głosy	1850	2600	5550
q_i	1.48	2.08	4.44
mandaty	2	2	4

Zmieńmy liczby głosów oddanych na partię.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1890	2200	5520
q_i	1.57	1.83	4.60
mandaty	1	2	5

	partia A	partia B	partia C
głosy	1850	2600	5550
q_i	1.48	2.08	4.44
mandaty	2	2	4

Zmieńmy liczby głosów oddanych na partię.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1890	2200	5520
q_i	1.57	1.83	4.60
mandaty	1	2	5

Definicja (Paradoks populacji)

Sytuacja, w której partia tracąca głosy otrzymuje mandat kosztem partii zyskującej głosy.

Określamy pewną liczbę głosów $D \in \mathbb{R}^+$, za którą partii przysługuje mandat. Wtedy każda partia dostanie $\lfloor p_i/D \rfloor$ mandatów.

Określamy pewną liczbę głosów $D \in \mathbb{R}^+$, za którą partii przysługuje mandat. Wtedy każda partia dostanie $\lfloor p_i/D \rfloor$ mandatów.

Przekształćmy:

i -ta partia dostaje k mandatów

$$\iff \left\lfloor \frac{p_i}{D} \right\rfloor \geq k$$

$$\iff \frac{p_i}{D} \geq k$$

$$\iff D \leq \frac{p_i}{k}$$

Metoda Jeffersona / D'Hondta

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 2$	1150	1400	2450
$k = 3$	767	933	1633
$k = 4$	575	700	1225
$k = 5$	460	560	980

Metoda Jeffersona / D'Hondta

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 2$	1150	1400	2450
$k = 3$	767	933	1633
$k = 4$	575	700	1225
$k = 5$	460	560	980

Metoda Jeffersona / D'Hondta

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 2$	1150	1400	2450
$k = 3$	767	933	1633
$k = 4$	575	700	1225
$k = 5$	460	560	980

Metoda Jeffersona / D'Hondta

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 2$	1150	1400	2450
$k = 3$	767	933	1633
$k = 4$	575	700	1225
$k = 5$	460	560	980

Metoda Jeffersona / D'Hondta

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 2$	1150	1400	2450
$k = 3$	767	933	1633
$k = 4$	575	700	1225
$k = 5$	460	560	980

Metoda Jeffersona / D'Hondta

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 2$	1150	1400	2450
$k = 3$	767	933	1633
$k = 4$	575	700	1225
$k = 5$	460	560	980

Metoda Jeffersona / D'Hondta

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 2$	1150	1400	2450
$k = 3$	767	933	1633
$k = 4$	575	700	1225
$k = 5$	460	560	980

Metoda Jeffersona / D'Hondta

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 2$	1150	1400	2450
$k = 3$	767	933	1633
$k = 4$	575	700	1225
$k = 5$	460	560	980

Metoda Jeffersona / D'Hondta

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 2$	1150	1400	2450
$k = 3$	767	933	1633
$k = 4$	575	700	1225
$k = 5$	460	560	980

Metoda Jeffersona / D'Hondta

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 2$	1150	1400	2450
$k = 3$	767	933	1633
$k = 4$	575	700	1225
$k = 5$	460	560	980
mandaty	2	2	4

Metoda Jeffersona / D'Hondta

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 2$	1150	1400	2450
$k = 3$	767	933	1633
$k = 4$	575	700	1225
$k = 5$	460	560	980
mandaty	2	2	4

Dobra wiadomość

Ta metoda (zwana metodą Jeffersona lub D'Hondta) jest *monotoniczna względem liczby mandatów*, to znaczy, że nie występuje tutaj paradoks Alabamy.

Metoda Jeffersona / D'Hondta

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 2$	1150	1400	2450
$k = 3$	767	933	1633
$k = 4$	575	700	1225
$k = 5$	460	560	980
mandaty	2	2	4

Dobra wiadomość

Ta metoda (zwana metodą Jeffersona lub D'Hondta) jest *monotoniczna względem liczby mandatów*, to znaczy, że nie występuje tutaj paradoks Alabamy.

Jeszcze lepsza wiadomość

Ta metoda jest *monotoniczna względem populacji*, to znaczy, że nie występuje tutaj paradoks populacji.

Zła wiadomość

Ta metoda nie zachowuje (górnej) kwoty.

Zła wiadomość

Ta metoda nie zachowuje (górnej) kwoty.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1000	2760	6240
$k = 1$	1000	2760	6240
$k = 2$	500	1380	3120
$k = 3$	333	920	2080
$k = 4$	250	690	1560
$k = 5$	200	552	1248
$k = 6$	167	460	1040
mandaty	0	2	6

Zła wiadomość

Ta metoda nie zachowuje (górnej) kwoty.

	partia A	partia B	partia C
głosy	1000	2760	6240
$k = 1$	1000	2760	6240
$k = 2$	500	1380	3120
$k = 3$	333	920	2080
$k = 4$	250	690	1560
$k = 5$	200	552	1248
$k = 6$	167	460	1040
mandaty	0	2	6
q_i	0.80	2.21	4.99

Zamiast $k = 1, 2, 3, \dots$ użyjemy $k = 1, 3, 5, \dots$

Zamiast $k = 1, 2, 3, \dots$ użyjemy $k = 1, 3, 5, \dots$

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 3$	767	933	1633
$k = 5$	460	560	980
$k = 7$	329	400	700
$k = 9$	256	311	544

Zamiast $k = 1, 2, 3, \dots$ użyjemy $k = 1, 3, 5, \dots$

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 3$	767	933	1633
$k = 5$	460	560	980
$k = 7$	329	400	700
$k = 9$	256	311	544

Zamiast $k = 1, 2, 3, \dots$ użyjemy $k = 1, 3, 5, \dots$

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 3$	767	933	1633
$k = 5$	460	560	980
$k = 7$	329	400	700
$k = 9$	256	311	544

Zamiast $k = 1, 2, 3, \dots$ użyjemy $k = 1, 3, 5, \dots$

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 3$	767	933	1633
$k = 5$	460	560	980
$k = 7$	329	400	700
$k = 9$	256	311	544

Zamiast $k = 1, 2, 3, \dots$ użyjemy $k = 1, 3, 5, \dots$

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 3$	767	933	1633
$k = 5$	460	560	980
$k = 7$	329	400	700
$k = 9$	256	311	544

Zamiast $k = 1, 2, 3, \dots$ użyjemy $k = 1, 3, 5, \dots$

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 3$	767	933	1633
$k = 5$	460	560	980
$k = 7$	329	400	700
$k = 9$	256	311	544

Zamiast $k = 1, 2, 3, \dots$ użyjemy $k = 1, 3, 5, \dots$

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 3$	767	933	1633
$k = 5$	460	560	980
$k = 7$	329	400	700
$k = 9$	256	311	544

Zamiast $k = 1, 2, 3, \dots$ użyjemy $k = 1, 3, 5, \dots$

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 3$	767	933	1633
$k = 5$	460	560	980
$k = 7$	329	400	700
$k = 9$	256	311	544

Zamiast $k = 1, 2, 3, \dots$ użyjemy $k = 1, 3, 5, \dots$

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 3$	767	933	1633
$k = 5$	460	560	980
$k = 7$	329	400	700
$k = 9$	256	311	544

Zamiast $k = 1, 2, 3, \dots$ użyjemy $k = 1, 3, 5, \dots$

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 3$	767	933	1633
$k = 5$	460	560	980
$k = 7$	329	400	700
$k = 9$	256	311	544
mandaty	2	2	4

Zamiast $k = 1, 2, 3, \dots$ użyjemy $k = 1, 3, 5, \dots$

	partia A	partia B	partia C
głosy	2300	2800	4900
$k = 1$	2300	2800	4900
$k = 3$	767	933	1633
$k = 5$	460	560	980
$k = 7$	329	400	700
$k = 9$	256	311	544
mandaty	2	2	4

Ta metoda również jest monotoniczna względem liczby mandatów oraz względem populacji, ale nie zachowuje (żadnej) kwoty.

Twierdzenie (Balinski-Young)

Nie istnieje metoda podziału mandatów, która zachowuje kwotę oraz jest monotoniczna względem populacji.

W dowodzie użyjemy dodatkowego (bardzo naturalnego) założenia, że jeśli partia X ma więcej głosów niż partia Y , to otrzyma nie mniej mandatów niż partia Y — znacznie uprości to dowód.

Dowód.

	partia A	partia B	partia C	partia D
głosy	660	670	2450	6220
q_i	0.53	0.54	1.96	4.98

Dowód.

	partia A	partia B	partia C	partia D
głosy	660	670	2450	6220
q_i	0.53	0.54	1.96	4.98

Przy zachowaniu (górnej) kwoty, mamy $m_C \leq 2$ oraz $m_D \leq 5$. W takim razie $m_B = 1$.

Dowód.

	partia A	partia B	partia C	partia D
głosy	660	670	2450	6220
q_i	0.53	0.54	1.96	4.98

Przy zachowaniu (górnjej) kwoty, mamy $m_C \leq 2$ oraz $m_D \leq 5$. W takim razie $m_B = 1$.

	partia A	partia B	partia C	partia D
głosy	680	675	700	6200
q_i	0.66	0.65	0.68	6.01

Dowód.

	partia A	partia B	partia C	partia D
głosy	660	670	2450	6220
q_i	0.53	0.54	1.96	4.98

Przy zachowaniu (górnej) kwoty, mamy $m_C \leq 2$ oraz $m_D \leq 5$. W takim razie $m_B = 1$.

	partia A	partia B	partia C	partia D
głosy	680	675	700	6200
q_i	0.66	0.65	0.68	6.01

Przy zachowaniu (dolnej) kwoty, mamy $m_D \geq 6$, więc $m_A + m_B + m_C \leq 2$, więc $m_B = 0$.



Chcielibyśmy, żeby jednemu mandatowi odpowiadała podobna liczba głosów.
Naturalną miarą *sprawiedliwości* metody jest więc

$$\left| \frac{m_i}{p_i} - \frac{m_j}{p_j} \right|.$$

Chcielibyśmy, żeby jednemu mandatowi odpowiadała podobna liczba głosów.
Naturalną miarą *sprawiedliwości* metody jest więc

$$\left| \frac{m_i}{p_i} - \frac{m_j}{p_j} \right|.$$

W szczególności chcielibyśmy, żeby metoda była *stabilna*, tzn. dla każdego i, j

$$\begin{aligned} \frac{m_i}{p_i} \geq \frac{m_j}{p_j} &\implies \frac{m_i}{p_i} - \frac{m_j}{p_j} \leq \frac{m_j + 1}{p_j} - \frac{m_i - 1}{p_i} \\ &\iff \frac{2m_i - 1}{p_i} \leq \frac{2m_j + 1}{p_j} \\ &\iff \frac{p_i}{2m_i - 1} \geq \frac{p_j}{2m_j + 1} \end{aligned}$$

Chcielibyśmy, żeby jednemu mandatowi odpowiadała podobna liczba głosów.
Naturalną miarą *sprawiedliwości* metody jest więc

$$\left| \frac{m_i}{p_i} - \frac{m_j}{p_j} \right|.$$

W szczególności chcielibyśmy, żeby metoda była *stabilna*, tzn. dla każdego i, j

$$\begin{aligned} \frac{m_i}{p_i} \geq \frac{m_j}{p_j} &\implies \frac{m_i}{p_i} - \frac{m_j}{p_j} \leq \frac{m_j + 1}{p_j} - \frac{m_i - 1}{p_i} \\ &\iff \frac{2m_i - 1}{p_i} \leq \frac{2m_j + 1}{p_j} \\ &\iff \frac{p_i}{2m_i - 1} \geq \frac{p_j}{2m_j + 1} \end{aligned}$$

Jedyną w tym sensie stabilną metodą jest metoda Sainte-Laguë.

- › Brandon Rorie. **Apportionment Calculator**.
<https://btror.github.io/apportionment.github.io/>
- › Balinski M.J., Young H.P. **Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man One Vote**. *Yale University Press* (1982)
- › Dominik Peters. **COMSOC Lectures 2025**. <https://dominik-peters.de/>

- ▶ Grimmett, G. **Stochastic Apportionment.** *The American Mathematical Monthly* 111.4 (2004)

- Grimmett, G. **Stochastic Apportionment**. *The American Mathematical Monthly* 111.4 (2004)

Wniosek

Udało się pokonać twierdzenie Balinskiego-Younga za pomocą losowości. Istnieje metoda, która zachowuje kwotę oraz jest monotoniczna (w sensie *oczekiwanej* liczby mandatów) względem populacji.

- ▶ Grimmett, G. **Stochastic Apportionment**. *The American Mathematical Monthly* 111.4 (2004)

Wniosek

Udało się pokonać twierdzenie Balinskiego-Younga za pomocą losowości. Istnieje metoda, która zachowuje kwotę oraz jest monotoniczna (w sensie *oczekiwanej* liczby mandatów) względem populacji.

- ▶ Hong, JI., et al. **Random Apportionment: A Stochastic Solution to the Balinski-Young Impossibility**. *Methodology and Computing in Applied Probability* 25.4, 91 (2023)

- Grimmett, G. **Stochastic Apportionment**. *The American Mathematical Monthly* 111.4 (2004)

Wniosek

Udało się pokonać twierdzenie Balinskiego-Younga za pomocą losowości. Istnieje metoda, która zachowuje kwotę oraz jest monotoniczna (w sensie *oczekiwanej* liczby mandatów) względem populacji.

- Hong, JI., et al. **Random Apportionment: A Stochastic Solution to the Balinski-Young Impossibility**. *Methodology and Computing in Applied Probability* 25.4, 91 (2023)
- Correa, J., et al. **Monotone Randomized Apportionment**. *Proceedings of the 25th ACM Conference on Economics and Computation* (2024)

- Grimmett, G. **Stochastic Apportionment**. *The American Mathematical Monthly* 111.4 (2004)

Wniosek

Udało się pokonać twierdzenie Balinskiego-Younga za pomocą losowości. Istnieje metoda, która zachowuje kwotę oraz jest monotoniczna (w sensie *oczekiwanej* liczby mandatów) względem populacji.

- Hong, JI., et al. **Random Apportionment: A Stochastic Solution to the Balinski-Young Impossibility**. *Methodology and Computing in Applied Probability* 25.4, 91 (2023)
- Correa, J., et al. **Monotone Randomized Apportionment**. *Proceedings of the 25th ACM Conference on Economics and Computation* (2024)
- Gözl, P., et al. **In this apportionment lottery, the house always wins**. *Operations Research* (2025)